$u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$; $\forall n \in IN$ et φ^{-1} est continue sur $[0,+\infty[$ qui contient L $\overset{th}{\Rightarrow}$ L est solution de l'équation $\varphi^{-1}(x) = x$

$\Leftrightarrow$ L=0 ou L=1 car $\varphi^{-1}(x) = x$ possède deux solutions qui sont 1 et 0.

$\Leftrightarrow$ L = 1. car $L=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 1$.

II-1/ $\cdot \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1 = f(0) \Rightarrow$ f est continue en 0.

$\cdot$ $\left.\begin{array}{l} x \mapsto e^x - 1 \text{ est continue sur }]0;+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \text{ est continue sur }]0;+\infty[\end{array}\right\} \Rightarrow$ f est continue sur IR_+^*

Bilan : f est continue sur $[0,+\infty[$.

2/ $\forall x > 0; f'(x) = \dfrac{e^x x - (e^x-1)}{x^2} = \dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$

$\cdot \forall x > 0; \varphi(x) > 0 \Rightarrow \forall x > 0; f'(x) > 0$.

3/a- $h \in IR_+^*$. La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$

$\forall x \in [0,+\infty[; g'(x) = \left(\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right)(2x) - e^x + 1$

$\cdot$ g est continue sur $[0,h]$ et dérivable $]0,h[$

$\Rightarrow$ il existe un réel $c \in]0,h[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(h)-g(0)}{h-0}$

Or $g(h) = \left(\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right)h^2 - e^h + h + 1 = 0$ et $g(0) = 0$

D'où $g'(c) = 0$.

Soit la fonction $\phi :]0,1[\to IR; x \mapsto hx$.

On a ϕ est dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[; \phi'(x) = h > 0$

$\Rightarrow \phi$ est strictement $\nearrow$ sur $]0,1[$ de plus ϕ est continue sur $]0,1[$

$\Rightarrow \phi$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $\phi(]0,1[) =]\lim\limits_{0^+}\phi, \lim\limits_{1^-}\phi[$

Or $\phi(]0,1[) =]\lim\limits_{0^+}\phi, \lim\limits_{1^-}\phi[$ car ϕ est cont. et strictement $\nearrow$ sur $]0,1[$

$=]0,h[$ qui contient c

$\Rightarrow$ il existe un seul réel $\theta \in]0,1[$ tel que $\phi(\theta) = \theta h = c$

Conclusion :

Il existe un seul réel $\theta \in]0,1[$ tel que $g'(\theta h) = 0$.

$g'(\theta h) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right)(2\theta h) - e^{\theta h} + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{e^h-1-h}{h^2} = \dfrac{e^{\theta h}-1}{2\theta h}$.

b- $\lim\limits_{h\to0^+}\left[\dfrac{e^h-1-h}{h^2}\right] = \lim\limits_{h\to0^+}\dfrac{e^{\theta h}-1}{2\theta h}$

(On pose $t=\theta h$. Quand $h \to 0^+$ on a $t=\theta h \to 0^+$ en effet

$\forall h > 0$ il existe un réel θ (qui depond de h) tel que $0 < \theta < 1$

$\Rightarrow 0 < \theta h < h$